互いに素であるピタゴラス数について

松田 大基
dyky@dyky.org

2005 年 5 月 10 日

1 はじめに

自然数 a, b, c に対して，

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

となる a, b, c の組み合わせをピタゴラス数という．本研究では，$a < b < c$ かつ，a, b, c が互いに素となる組み合わせについて焦点をあて，その成立条件について調べる．

式 (1) より，

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 \\ &= (c-b)(c+b) \end{aligned}$$

となる．ここで自然数 $D = c - b$, $L = c + b$ を用いて，

$$\begin{aligned} a^2 &= (c-b)(c+b) \\ a^2 &= DL \end{aligned} \tag{2}$$

とする．本論文では式 (**??**) を評価していく．

2 D が奇数のとき

a が偶数ならば，(b, c) の組み合わせは，(偶数, 偶数) もしくは (奇数, 奇数) となる．このとき，D は偶数となり，本条件と一致しない．

a が奇数ならば，(b, c) の組み合わせは，(偶数，奇数) もしくは (奇数, 偶数) となり，D は奇数となり，本条件と一致する．

式 (2) より，

$$\begin{aligned} a^2 &= DL \\ a^2/D &= L \end{aligned} \tag{3}$$

と変形できる．このとき，a, D, L が自然数で成立する条件を考える．

a と D の最大公約数を k とする．このとき，a, D は互いに素である自然数 m, n を用いて，

$$a = km, \quad D = kn$$

と表せる．このとき，式 (3) は，

$$k\frac{m^2}{n} = L \tag{4}$$

となる．m と n は互いに素であるので，L が自然数となるためには k は n の倍数となる．自然数 t を用いて，

$$k = tn$$

とすると，a, D, L は，

$$a = tmn, \quad D = tn^2, \quad L = tm^2$$

となる．ゆえに，b, c は，

$$b = \frac{t(m^2 - n^2)}{2}, \quad c = \frac{t(m^2 + n^2)}{2}$$

となる．a, b, c が互いに素となる条件は $t = 1$ のときのみとなる．ここで改めて a, b, c, D, L は

$$a = mn, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

$$D = n^2, \quad L = m^2$$

となる．

さらに，a, b, c が互いに素となる条件を考える．

a は奇数であるので，$p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, q_3, \ldots$ を 2 でない素数とし，m, n を素因数分解して，

$$\begin{aligned} m &= {p_1}^{\alpha}{p_2}^{\beta}{p_3}^{\gamma}\ldots \\ n &= {q_1}^{A}{q_2}^{B}{q_3}^{C}\ldots \\ & \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots, A, B, C, \ldots \text{は自然数}) \end{aligned}$$

と表す．このとき a, b, c は，

$$\begin{aligned} a &= ({p_1}^{\alpha}{p_2}^{\beta}{p_3}^{\gamma}\ldots)({q_1}^{A}{q_2}^{B}{q_3}^{C}\ldots) \\ b &= \frac{({p_1}^{2\alpha}{p_2}^{2\beta}{p_3}^{2\gamma}\ldots) - ({q_1}^{2A}{q_2}^{2B}{q_3}^{2C}\ldots)}{2} \\ c &= \frac{({p_1}^{2\alpha}{p_2}^{2\beta}{p_3}^{2\gamma}\ldots) + ({q_1}^{2A}{q_2}^{2B}{q_3}^{2C}\ldots)}{2} \end{aligned}$$

となる．上式において，

$$\begin{aligned} & a,b,c\text{ が互いに素とならない} \\ \Leftrightarrow\quad & b,c\text{ が共に } p_1,p_2,p_3,\ldots,q_1,q_2,q_3,\ldots\text{ のいずれかをを約数にもつ} \\ \Leftrightarrow\quad & p_k = q_l\text{ となる組み合わせが少なくとも一つ存在する} \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} & a,b,c\text{ が互いに素である} \\ \Leftrightarrow\quad & p_k = q_l\text{ となる組み合わせが存在しない} \\ \Leftrightarrow\quad & m,n\text{ が互いに素である} \end{aligned}$$

となる．

上記の条件より，a が奇数であり，m,n もまた奇数である．また，

$$\begin{aligned} b &= \frac{m^2-n^2}{2} \\ &= \frac{(m-n)(m+n)}{2} \end{aligned}$$

となる．ここで，$m-n$, $m+n$ は共に偶数なので，b は偶数となり本条件に一致する．また，c^2 は，

$$c^2 = (b-a)(b+a)$$

なので，$b-a$, $b+a$ は共に奇数なので，c は奇数となり a,b と同様に本条件に一致する．

3　D が偶数のとき

a が奇数ならば，(b,c) の組み合わせは，(偶数, 奇数) もしくは (奇数, 偶数) となる．このとき D は奇数となるので，本条件に一致しない．

a が偶数ならば，(b,c) の組み合わせは，(偶数, 偶数) もしくは (奇数, 奇数) となる．ただし，(偶数, 偶数) の組み合わせのとき a,b,c は互いに素でなくなるので不適．(奇数, 奇数) の組み合わせは，本条件に一致する．同様に L も偶数となる．

a,D,L は偶数なので，自然数 α,d,l を用いて，

$$a = 2\alpha,\quad D = 2d,\quad L = 2l$$

と表せる．このとき，式 (2) は，

$$\alpha^2 = dl \tag{5}$$

となる，このとき式 (5) は式 (3) と同様なので，3 つの自然数 m, n, t を用いて，α, d, l は,

$$\alpha = tmn, \quad d = tn^2, \quad l = tm^2$$

と表せる．そして，a, b, c は,

$$a = 2tmn, \quad b = t(m^2 - n^2), \quad c = t(m^2 + n^2)$$

$$(D = 2tn^2, \quad L = 2tm^2)$$

となる．a, b, c が互いに素となるためには，$t = 1$ のときのみで，改めて a, b, c は,

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$

$$(D = 2n^2, \quad L = 2m^2)$$

と表せる．

さらに，a, b, c が互いに素となるには，D が奇数であるときの条件と同様に，m, n が互いに素であり，m, n のいずれかが偶数で，もう一方は奇数となる必要がある．

$\because$ m, n 共に奇数のとき，b, c は偶数となり，a, b, c は互いに素でなくなる．同様に，m, n が偶数のときも a, b, c は互いに素でなくなる．

このとき a は 4 の倍数となる．b, c がともに奇数になるのは明らかで本条件に一致する．

4 結論

自然数 a, b, c に対して，a, b, c が互いに素で,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成立する条件は,

4.1 a が奇数のとき

互いに素である二つの奇数自然数 m, n を用いて,

$$a = mn, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

となる．ここで b が自然素となるためには，$m > n$ であり，$a < b$ となるためには,

$$m > (1 + \sqrt{2})n$$

となる．このとき，$c-b\,(=D)$，$c+b\ (=L)$ は，

$$c-b=n^2, \quad c+b=m^2$$

となり，平方数となる．

m,n は共に奇数なので，自然数 k を用いて，

$$m=n+2k$$

と表せる．このとき b は，

$$\begin{aligned} b &= \frac{m^2-n^2}{2} \\ &= \frac{(n+2k)^2-n^2}{2} \\ &= 2k(n+k) \end{aligned}$$

k が偶数のとき，b は 4 の倍数となる．また，k が奇数のとき，$n+k$ は偶数になるので，b はまた 4 の倍数となる．

結論として，b は 4 の倍数である．また，c は奇数となる．

4.2 a が偶数のとき

互いに素である二つの自然数 m,n を用いて，

$$a=2mn, \quad b=m^2-n^2, \quad c=m^2+n^2$$

となる．ただし，m,n のどちらかは偶数で，もう一方は奇数となる．つまり，a は 4 の倍数となる．また，b,c はともに奇数となる．

a が奇数のときと同様，b が自然数であるためには，$m>n$ であり，$a<b$ となるためには，

$$m>(1+\sqrt{2})n$$

でなければならない．

このとき，$c-b\,(=D)$，$c+b\ (=L)$ は，

$$c-b=2n^2, \quad c+b=2m^2$$

となり，平方数の 2 倍となる．